

2 次 関 数

加藤英輝（北海道）

0 授業が始まるまで

わたしが数教協を知ったのは、6年前の第23回全道大会（札幌会場）でした。当時新採で、わけもわからず授業をやっていたわたしにとって、そこで見る実践や教材の数々はあまりに新鮮で、カルチャーショックにも似た衝撃を受けました。とくに北見の小畑先生が公開授業でやられた「滑車を使った2次関数の導入」はとて面白く、生き生きとした生徒たちの姿と一緒に、いまでも鮮明に記憶に残っています。

2次関数のシェーマとしては落下運動が一般に用いられていますが、実際の導入としては次の4つのパターンが考えられます。

- ① 落下運動の理論値を与える。
- ② テープタイマーを使って実験をする。
- ③ カーテンレールを使って実験をする。
- ④ 滑車を使って実験をする。

1年目はあっさり①で、2年目はテープタイマーを使って導入をしましたが、これがどうもうまいかない。実験そのものがうまいかないのだから、結局理論値を与えてその場を切り抜けなければなりませんでした。

せっかく実験をしたのに、その結果を定量的に使えないなんて、なんとも癪ではありませんか。いろいろ考えるうちに、要求はどんどん広がっていきました。

- ① 実験の結果を直接定量的に使えないか。
- ② 生徒1人1人が実験に参加できないか。

③ 生徒全員が自分のデータを持ってないか。

これだけの要求を満足できる教具はないだろうかと考えるうちに、ふと全道大会で見た滑車を使った導入を思い出し、これでやってみようと思ったのです。

さっそく材料を探しましたが適当な滑車が見つからなく、我が愛車52年型ターセルは、200km 離れた旭川市に一路向かうのでした。

1 滑車の理論と構造

原理的には滑車にひもを通して、両端に重さの違う重りをぶらさげればいいのですが、定量的なデータをできるだけ正確に、しかも大量にとるためにいくつかの工夫をしています。

まず滑車は抵抗の少ない良質のものを選びました。わたしが使ったのは、半径9 cm、重さ865 g、二重ベアリング入り的高级品です。

テープに落下の記録をとるために、理科室からテープタイマーを借りて取り付けました。直流モーターで分銅を回転させて記録するもので、信頼性に疑問もっていましたが、新しい電池だと0.02秒に1回正確に回転します。テープは波打たないように、タイマーの近くに軸をもうけて取り付けました。

理論的な問題を整理しておきましょう。一般的には、重りの重さをそれぞれ m_1 , m_2 ($m_1 > m_2$) とすると、重りの加速度 α は

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

といわれていますが、これは滑車の質量が無視できる場合であって、現実には滑車はかなり重く、このようにはなりません。

質量 M 、半径 R の滑車が角速度 ω で回転すると、その運動エネルギーは

$$E = \frac{1}{4} M \omega^2 R^2$$

となります。重りを付けたロープがすべることなく滑車を回転させるとし、ロープの移動する速度を v とすると $\omega R = v$ だから

$$E = \frac{1}{4} M v^2$$

ここで回転エネルギーが半径に依存しないことは注目すべきでしょう。

滑車を含む系全体のエネルギーを考えてみます。重り m_1 , m_2 が初期の位置か

ら x だけ移動したとすると、エネルギー保存の法則から

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{4}Mv^2=(m_1-m_2)gx$$

両辺を時間で微分して整理すると

$$\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)v\alpha=(m_1-m_2)gv \quad \therefore \alpha=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}g$$

となります。

2 授業

(1) どんなふうに着ちる？

今日の教材はあまりに重たいので、休み時間に学習係の生徒を呼んで教室に運ばせておきます。ダランド横の物置から砲丸2個、理科室から真空ポンプと試験管のお化けみたいな自然落下実験器具、そしてテープタイマー一式。

真空ポンプはしばらく使われたことがないらしく、埃まみれのうえにオイルが入っていません。どんなオイルを入れたらいいのかわからないので、取りあえず自分のバイクのエンジンオイルを強制注入。なんか不安だな……。

T ものが落ちるとき、どんなふうに着ちると思いますか？ 次のなかから選んでください。

- ① だんだん早くなりながら落ちる。 ② 同じ早さで落ちる。
③ 最初はだんだん早くなって、途中から同じ早さで落ちる。

この問題は生徒にとって決して自明ではないようです。いちばん多いのは③で、①と②がほぼ同数になりました。実際、③が正解になるのかな？

T それではテープタイマーで実験してみます。

T 点の間隔がだんだん広がっていますね。これはどういうことでしょうか。

S 同じ時間に落ちる距離が長くなっているから、だんだん速くなっている。

T どんなものでもだんだん速くなっていくのかな？

S 空気の抵抗があるから、紙はひらひらおちるよ。

T それじゃ真空中ならどうなるか実験してみよう。

ガラス管のなかに羽毛、紙切れ、金属片を入れて、真空ポンプで空気を抜きます。「セーノ」のかけ声とともにガラス管を逆さまにしますが、どうしても同時に落ちてくれません。どうやら真空度が低いのと、羽毛や紙片はガラス管の壁に

引っ掛かってスムーズに落ちないようです。完全なNGでした。

そこで今度は、金属片とパチンコ玉、紙片を使ってやり直します。

S 速すぎてよくわからないよ、もう1回。

T 今度はよく見てろよ。

調子にのって2回、3回とやっているうちに、パリンという鋭い音。あわれ真空落下実験装置はごみ箱行きとなりました。

物体の同時落下を調べるために、空気抵抗が無視できると考えられる大小2個の砲丸の落下実験を行ないます。今日のメインイベントです。

生徒を全員中庭に出し、砲丸2個をショルダーバッグに入れて、壁ぞいのハシゴを伝って屋上に上がります。屋上のへりに立ち、ヨーイドンのかけ声で2.7kgと4kgの砲丸を同時に放しました。

T どうだ、同時に落ちただろう。

S よくわかんないよ、もう一度やって。

T 先生は疲れるんだぞ。今度はよくみておけよ。

S 同じみたいだけど、違うみたいにも見える。もう1回やって。

これが生徒の作戦だと気が付いたときには、すでにチャイムがなっていました。マタヤラレタ……

(2) 落下を調べよう

休み時間のうちに滑車の装置を教室にセットしておいたので、生徒たちは何が始まるのかと興味津々です。

T 前の時間に自然落下の実験したけど、速すぎてよくわからない。そこで今日は、先生が地球をだまくらかして物をゆっくり落とす装置を作ってきました。

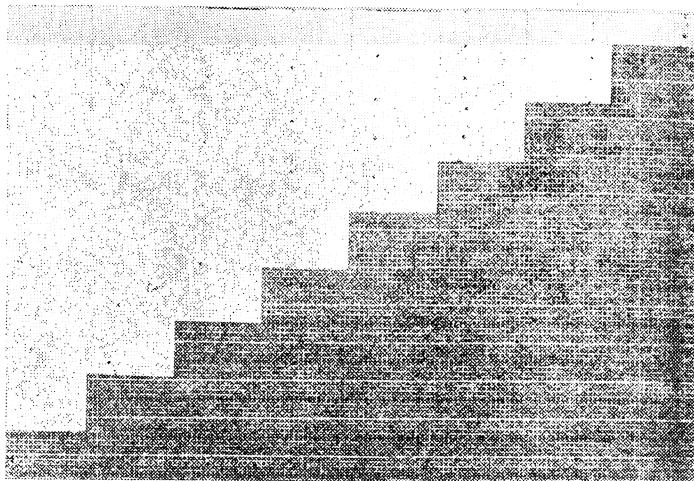
S 地球をだますの？

T そうです。どんな重さの物も同じ速さで落ちるはずだけど、この装置を使うとゆっくり落ちるのです。

ためしに100匁と80匁の重り（釣りの重りを使うので、匁なのです）を付けて手を放すと、ゆらーりと加速されていきます。

装置の使い方を説明し、150匁と100匁の重りを付けて（加速度は1m/sになる）、グループごとに全員のデータを2回ずつとらせませす。データをとりおわた

ら各自のテープを最初の点から5点おきに切ってプリントにはっていきますが、中には斜めに切ったり、点の数を間違える生徒もいるようです。



T さあ、どうなったかな。

S だんだん長くなってる。テープタイマーの実験と同じだ。

S 階段みたい。

S 同じくらいずつ長くなってる。

T そういう変化をなんていったかな？

S 一様変化！

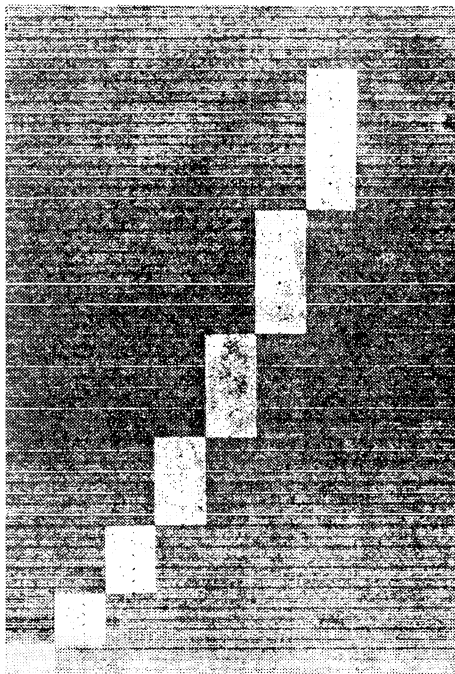
T 何が一様変化してるの？

S テープの長さ。

S 長さだよ。

T そう、長さが一様変化してるんですね。ところで、最初の長さは？

S とまってるから0。



T 最初の速さが0で一様変化しているということは……

S 比例だ！

T 何と何が比例してるの？

S 時間と速さ。

T 落下運動では時間と速さが比例してるんですね。それでは、今度はもう1本のテープを同じように切って、テープの下を前のテープのうえの位置にあわせてはってみましょう。

T テープの上の端はどんなふうに変化していますか。

S だんだんふえ方が大きくなっている。

S 一様変化じゃないね。

T このテープの上端は何を表しているのかな？

S ………

T テープの長さは何を表していたかな？

S 速さ。

T 速さそのもの？

S いや、一定時間の間に落ちた距離。

T それを積み重ねていくんだね。

S あ、その時間までに落ちた距離だ。

T そうですね。落下運動では時間と速さは比例するけど、落下距離は一様変化じゃないようだね。

(3) 速度と時間の関係は？

T 今日は、前の時間に実験で作ったテープのグラフをもとに、時間と速さの関係を式にしてみます。

T 点と点の間隔は0.02秒です。それを5点おきに切ったから、1本のテープの長さは0.1秒間に落ちた距離ですね。最初のテープの長さは何センチですか？

S 0.5cm。

T 0.1秒間に0.5cm落ちたからその時の速さは？

S $0.5 \div 0.1$ だから5 cm/s

T 同じようにしてプリントの表を完成させましょう。

番 号	1	2	3	4	5	6	7	8
時 間 (秒)	0 ↓ 0.1	0.1 ↓ 0.2	0.2 ↓ 0.3	0.3 ↓ 0.4	0.4 ↓ 0.5	0.5 ↓ 0.6	0.6 ↓ 0.7	0.7 ↓ 0.8
テープの長さ (cm)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5
速度(cm/秒)	5	15	25	35	45	55	65	75
速度の変化	10	10	10	10	10	10	10	10

T 速さが同じずつだけ変化してるね。この速さの変化の大きさのことを“加速度”といいます。ここでは一定時間の間の変化が同じだから，“等加速運動”といいます。0.1秒間に10cm/s ずつ速さが増えているから、1秒間でどれだけ変化しますか？

S $10[\text{cm/s}] \div 0.1[\text{s}] = 100[\text{cm/ss}]$

T $\text{ss} = \text{s}^2$ だから cm/s^2 だね。これは1秒間の速さの変化を表すから加速度の単位です。この場合の加速度は $100[\text{cm/s}^2]$ ということですね。

T 速さは時間に比例し、1秒ごとに 100cm/s ずつ速さが増えるということは、時間を x 秒、その時の速さを $y\text{cm/s}$ とすると、関数の式はどうなるか？

S 比例定数が100だから $y = 100x$

T 落ち始めてからの時間を x 、その時の速さを y とすると、 y は x に比例して $y = ax$ となり、このとき a は1秒あたりに変化する速さだから加速度になるのですね。

(4) 面積図で考えよう

T 今日は落下運動から少し離れて、速さと時間と距離の関係を考えてみましょう。いま、自動車が 40km/時 の速さで3時間走ったら、何キロメートル走ったことになりますか。

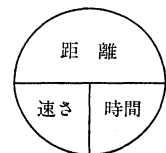
S 120km 。

T どうして？

S 距離 = 速さ × 時間だから。

S 図で覚えてる。(右図)

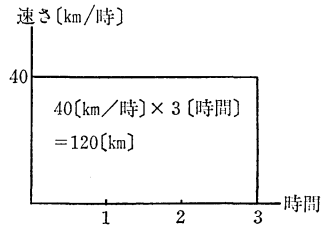
T 公式で覚えたり、図で覚えたりしている人もいるけ



ど、今日は新しい方法、グラフを使って考える方法を勉強しましょう。速さは単位時間に移動する距離で表します。40km/時 という速さは、1時間に40km進む速さですね。ですから3時間では

$$40[\text{km/時}] \times 3[\text{時間}] = 120[\text{km}]$$

進むことになるのですね。この運動を、縦軸を速さ、横軸を時間としたグラフに書くとこのようになります。このグラフで進んだ距離は 40×3 だから、ちょうどこのグラフで囲まれる面積になるね。このように、時間と速さのグラフを書いたとき、グラフで囲まれる面積は移動した距離になるのです。



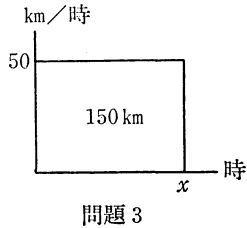
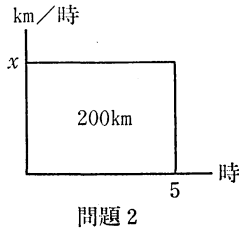
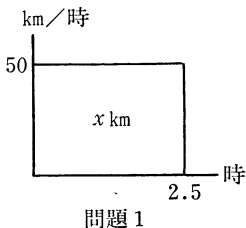
S 面積が距離なんですか？

T そうです。これまでみんなは、距離を数直線で表すことが多かったから変に思うかもしれないけど、ここは発想の転換をしてください。それから、横軸が距離でなくて時間だということも注意しなければなりませんね。それでは慣れるために問題をやってみましょう。

〔問題1〕 A町からB町へ行くのに、時速50kmで2時間半かかりました。A町からB町までの距離は何kmでしょうか。

〔問題2〕 A町から200km離れたB町へ行くのに、5時間かかりました。一定の速さで走ったとすると、時速何kmで走ったことになりますか。

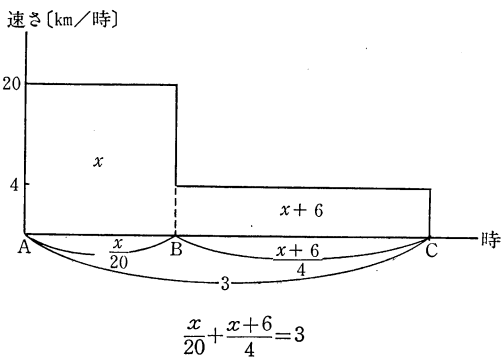
〔問題3〕 A町から150km離れたB町へ行くのに、時速50kmで走ると何時間かかるでしょうか。



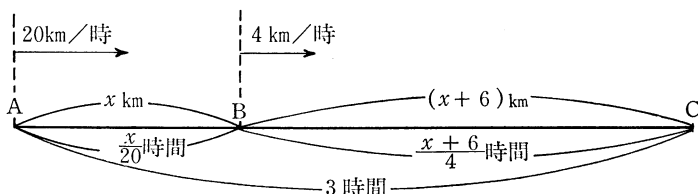
T この特長は、時間と速さと距離の関係が長方形の横と縦と距離の関係になっ

てしまうことなんだね。速さの問題はわけがわからなくても、長方形の面積なら簡単だね。ために応用問題をやってみよう。

〔問題4〕 太郎くんがA町からB町を通ってC町へ行きました。AB間は自転車で時速 20km, BC間は歩いて時速 4 km の速さで行ったところ、全体で3時間かかりました。BC間の距離はAB間の距離より6 km 長いそうです。AC間は何 km あるでしょうか。AB間の距離を x km として方程式を作りなさい。



この教材は、前に作った時間と速度の関係のグラフから時間と落下距離の関係を導くために導入したのですが、生徒にとって面積図を使い慣れていないこと、面積が距離を表すこと、横軸が距離でないなど、これまで見慣れた数直線とはかけはなれているため、予想以上に時間がかかっています。しかし結果的には、図の1つの要素が1つの量に対応している、長方形の面積と辺の長さという慣れた計算に還元されるなどの理由から、意外と生徒に歓迎されました。線分図と比較してみてください。

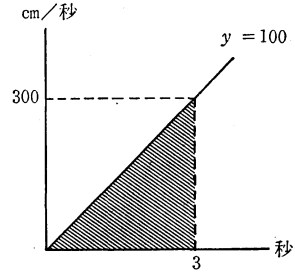


(5) 落下距離と時間の関係は？

T 今日は落下運動に戻って、時間と落下距離の関係を考えてみましょう。滑車を使った実験で、時間と速さの関係をグラフにしましたね。このグラフから3秒間に何 cm 落下したかわかりますか。

S ………

T このグラフは時間と速さの関係を表したグラフですね。このようなグラフで、動いた距離はどんなふうに表されているんですか。



S 面積。

T じゃ、3秒間に落下した距離は？

S 3秒後の速さは300cm/秒だから、 $300[\text{cm}/\text{秒}] \times 3[\text{秒}] = 900[\text{cm}]$ 。

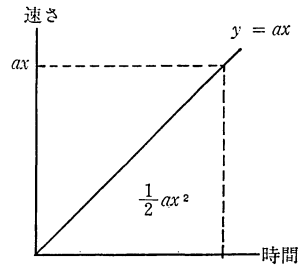
T それだったら、この長方形の面積だから、はじめからずっと300cm/秒の速さで落ちたことになるね。

S そうか。グラフで囲まれた面積だから $300[\text{cm}/\text{秒}] \times 3[\text{秒}] \div 2 = 450[\text{cm}]$ になるんだ。

T 一般に、加速度が a である等加速運動の時間と速度の関係は $y = ax$ になるから、 x 秒間に移動した距離 z はグラフから

$$z = \frac{1}{2} \times x \times ax = \frac{1}{2} ax^2$$

となります。



(6) 自然落下ってすごい

T 最初の授業の時に、屋上から砲丸を落としたけど、地面につくまで何秒くらいかかったかわかりますか？

S 3秒ぐらいかな。

T 自然落下のときの加速度はだいたい $10\text{m}/\text{秒}^2$ だから、落ち始めてからの時間 x と落下距離 z の関係はどうなりますか？

S $z = 5x^2$

T 屋上の高さを 10m とすると、何秒で落ちることになりますか？

S $5x^2 = 10$ だから $x = 1.4$ 秒

S えー、そんなに速かった？

T 思ったより早いもんだね。それでは問題です。

125mの高層ビルの屋上からパチンコ玉を落としたり、地上につくときの速度はどのくらいになっているのでしょうか。

S 加速度が $10\text{m}/\text{秒}^2$ だから、 x 秒後の速度は $y=10x$ で……何秒で地上につくかわからないよ。

T 落ちる速度がわかっているんだから、さっきの砲丸の問題と同じようにしたら？

S ああ、そうか。高さが125mだから、地上につくまでの時間は $5x^2=125$
 $x=5$ [秒] となるから、その時の速度は $y=10x=50$ [m/秒]

T $50\text{m}/\text{秒}$ は時速になおすと $180\text{km}/\text{時}$ だね。

S 時速 180km で落ちてくるの？ 当たったら大変だね。

T 雨は大体 2000m くらいのところから降ってくるんだけど、もし自然落下で落ちてくるとしたら 720km 毎秒の速度になっているんだ。こんな雨に当たったら、みんな穴だらけになってしまうね。

S 空気の抵抗に感謝しなきゃ。

T もうひとつおもしろい問題をやってみよう。野球のボールを投げたときの速度を知りたいと思わないかい。

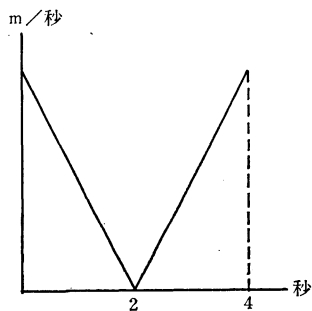
S スピードガンないもの。

T そんなものなかったって、ストップウォッチと紙と鉛筆でわかるんだよ。物が落ちてくるときには $10\text{m}/\text{秒}^2$ の割合で速くなりながら落ちてくるけど、逆に投げ上げたときは $10\text{m}/\text{秒}^2$ の割合で遅くなりながら上がって行って、そのうち止まってまた $10\text{m}/\text{秒}^2$ の加速度で落ちてきます。だから、投げはじめの速度と地上に落ちてくる速度は同じになるんだね。このボールの速度と時間の関係をグラフにすると右図のようになります。

もし投げたから4秒で落ちてきたとしたら、中間の2秒のときに頂上であって、そのとき速度が0になり、そこから2秒で落ちてきたこととなります。

そうすると地上に落ちたときの速度はいくらになりますか。

S $y=10x=20$ [m/秒] 時速だと ………



72km/時だ。

(7) 平均速度ってなに？

T 今日は平均速度について勉強します。

A君が自転車で、 2 m/秒^2 の等加速度で20秒間走りました。B君が同じ距離を同じ時間で走るとすれば、秒速何mで走らなければならないでしょうか。

T 2人の運動のグラフをかくと、右図のようになりますね。 $\triangle OPQ$ の面積は何を表していますか？

S A君が走った距離。

T じゃあ、長方形RSQOの面積は？

S B君の走った距離。これが $\triangle OPQ$ の面積と等しくなればいいのだから。

$$20x = 400 \quad x = 20[\text{m/秒}]$$

T 変化する速さで走ったとき、一定の速さで同じ距離を同じ時間で走るために必要な速さを、“平均速度”といいます。

S ちょうどまん中の速さのことだね。

T 等加速運動の場合はそうなるね。でも、もっと複雑な運動ではそうとはかぎらないよ。それでは、いまの問題を、時間と距離のグラフで考えてみましょう。

T A君の時間 x と、距離 y の関係は？

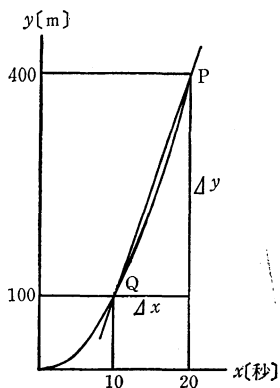
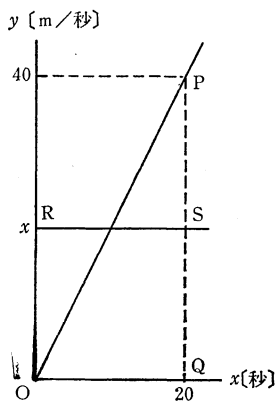
S $y = x^2$

T 右のグラフのようになるね。出発してから10秒後から20秒後までの10秒間に移動した距離は？

S 300m。

T これを10秒間で走るとしたら、平均速度はいくらになるかな？

S $300[\text{m}] \div 10[\text{秒}] = 30[\text{m/秒}]$



- T 平均速度は、時刻が x_1 のときの速さを y_1 , x_2 のときの速さを y_2 とすると、
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
 となるんですね。どっかで見たことないかな？
- S あっ、1次関数の変化の割合と同じだ。
- T 1次関数のグラフでは、変化の割合のことを何とってましたか。
- S 傾き。
- T そうですね。平均速度は、グラフで点Pと点Qを通る直線の傾きに等しいのです。このことを数学では、一般に“平均変化率”とか、“変化の割合”とかいいます。

3 おわりに

滑車をつかった実験の導入ではじまる2次関数の実践から特徴的（と思われる）部分を紹介しました。全体として運動の分析に大部分を費やしたため、非常にまどろっこしいノロノロした授業になってしまいましたが、2次関数の「背景」が少しは見えたのではないかと考えています。

生徒が最も興味をしめしたのは、「面積図」と「自然落下ってすごい」の授業でした。「面積図」では、「この程度」と思われる問題を、グラフとにらめっこをしながら、ああでもないこうでもない和相談しながら解いている生徒の姿をみると、「数学ってこういうものなんだよな」と普段の自分を反省してしまいました。最後に、ある「数学大きい少女」の授業の感想を紹介して終わります。「今年に入って、家で数学の勉強をすることが多くなったのは、受験生だからというせいでもあると思う。でも前ならテストの時でもいやでいやで復習などしても長つづきしなかった私が、応用問題を朝の4時半まで5時間も考えたということは、信じられないかもしれないけど本当で、これは自分でも信じられないことだ。グループで授業をするというのは今年が初めてで、私にとっては数学がキライでなくなるきっかけになっていたかもしれない。でも、この世で数学ほど大キライなものはない。虫とかもキライだけど、おなじくらいキライだ。キライなんだけど、グループでやっているときはみんな一生懸命やるので、私も頑張ろうと思ってやるから少しは数学に自信がついた。

だから、数学は大キライなんだけど、授業はキライじゃないから安心してね。

（宗谷・拓心中）